MÉTHODES NUMÉRIQUES

Méthode des volumes finis

Institut National Polytechnique de Toulouse

ENSEEIHT 1A-MFEE

Juin 2018

LADRECH Tristan

NGUYEN Marie

Table des matières

INTRODUCTION

Dans le cadre du projet réalisé en "Volume finis", nous étudions l'évolution de la température dans un composant électronique CPU de "Single Board Computer (SBC) Banana Pi M3" composé du processeur Allwinner A83 comprenant 8 coeurs. Ces coeurs fonctionnent à une fréquence allant de 1 GHz à 1,8 GHz. Pour tirer profit pleinement de ces derniers, il est nécessaire d'ajouter un système de refroidissement pour éviter une surchauffe du processeur.

Afin de dimensionner ce dispositif de refroidissement, nous étudierons le phénomène d'advection-diffusion thermique par la méthode de volumes finis.

Pour simplifier, on considère que le problème est bidimensionnel et la géométrie du problème est décrite sur la figure ci dessous.

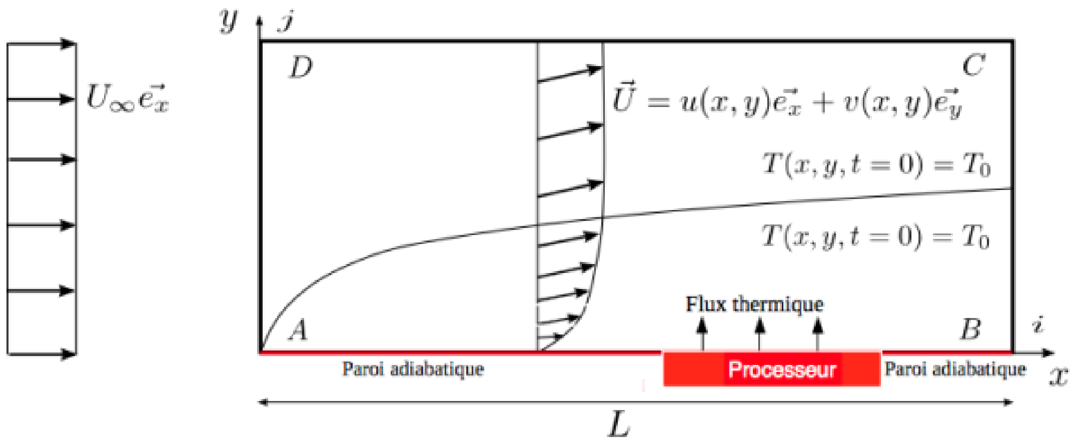

FIGURE 1 – schéma du problème à l'instant t=0

Le processeur est placé sur un substrat de conductivité thermique très faible. Ainsi, on considère que le flux de chaleur à travers la plaque AB est nul (paroi adiabatique) sauf à l'emplacement du processeur où le flux de chaleur injecté dans le domaine de calcul correspond à sa consommation électrique. Le processeur a une section carrée d'1,5 cm de côté et est situé entre 3,5 et 5 cm du début de la plaque. La longueur totale du SBC est de 9cm.

On impose une vitesse au flux d'air U infini en amont du dispositif, donnant lieu au développement d'une couche limite au dessus de la plaque. On considère que l'écoulement reste laminaire, que la masse volumique est constante et que la viscosité cinématique de l'air vaut $\nu = 1,8 * 10^{-}5$ m$^2/s$.

I Discrétisation

I.A Discrétisation générale

L'équation du transport de la température par advection et diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\overrightarrow{U}T) - \alpha \nabla \cdot \overrightarrow{\nabla} T = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + div(\overrightarrow{U}T) - \alpha \cdot div \overrightarrow{\nabla} T = 0 \tag{2}$$

où T est la température de l'écoulement, $\overrightarrow{U}(x,y) = u(x,y)\overrightarrow{e_x} + v(x,y)\overrightarrow{e_y}$ le champ de vitesse correspondant au profil de Blasius et α le coefficient de diffusivité thermique isostrope.

Grâce à la méthode des volumes finis qui consiste à découper notre domaine d'étude en volumes indicés $V_{i,j}$ ou "cellules", nous discrétisons chaque grandeur (température, vitesse, flux) dans chaque volume. En terme de volumes , on peut réécrire l'équation précédente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{V_{i,j}} T dV + \iiint\limits_{V_{i,j}} div(\vec{U}.T) dV - \alpha \iiint\limits_{V_{i,j}} div(\overrightarrow{\nabla} T) dV = 0 \tag{3}$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradsky et en intégrant ensuite, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{V_{i,j}} T dV + \iint\limits_{S} \vec{U}.T d\vec{S} - \alpha \iint\limits_{S} \vec{\nabla} T d\vec{S} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial (TV)}{\partial t} + \vec{u}TS - \alpha \vec{\nabla} TS = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial (TV)}{\partial t} + \vec{F_a} + \vec{F_D} = 0 \tag{6}$$

Cette équation est composée de trois termes à discrétiser.

I.B Discrétisation de la température

On discrétise le terme $\frac{\partial (TV)}{\partial t}$ de l'équation précédente en utilisant un schéma implicite en temps. On a alors la relation :

$$\frac{\partial (TV)}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \tag{7}$$

I.C Discrétisation du terme advectif

On discrétise le terme $\overrightarrow{u}TS$ de l'équation précédente en utilisant un schéma amont. En prenant par exemple la face Est, on obtient :

$$\overrightarrow{F_e, a} = \overrightarrow{u}TS = \overrightarrow{U_{i+\frac{1}{2},j}} T_{i,j} \Delta y_{i,j} \tag{8}$$

I.D Discrétisation du terme diffusif

On discrétise le terme $-\alpha\vec{\vec{\nabla}}TS$ de l'équation précédente en utilisant un schéma centré. En prenant par exemple la face Est, on obtient :

$$\overrightarrow{F_{e,d}} = -\alpha\vec{\vec{\nabla}}TS = -\alpha\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x_{i,j}}\Delta y_{i,j} \tag{9}$$

I.E Discrétisation de l'équation du transport de la température finale

L'équation (6) nous donne immédiatement :

$$\frac{\partial(TV)}{\partial t} = -(\vec{F_a} + \vec{F_D}) \tag{10}$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = -(\vec{F_{e,a}} + \vec{F_{w,a}} + \vec{F_{n,a}} + \vec{F_{s,a}} + \vec{F_{e,d}} + \vec{F_{w,d}} + \vec{F_{n,d}} + \vec{F_{s,d}}) \tag{11}$$

En utilisant les discrétisations précédentes :

$$\begin{split}\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t}\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j} = -\alpha\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x_{i+1,j}}\Delta y_{i+1,j} - \alpha\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\delta x_{i,j}}\Delta y_{i,j} - \alpha\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\delta y_{i,j+1}}\Delta x_{i,j+1} \\ -\alpha\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\delta y_{i,j}}\Delta x_{i,j} + \overrightarrow{U_{i+\frac{1}{2},j}}T_{i,j}\Delta y_{i+1,j} - \overrightarrow{U_{i-\frac{1}{2},j}}T_{i-1,j}\Delta y_{i,j} + \overrightarrow{V_{i,j+\frac{1}{2}}}T_{i,j}\Delta x_{i,j+1} - \overrightarrow{V_{i,j-\frac{1}{2}}}T_{i,j-1}\Delta x_{i,j}\end{split} \tag{12}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{split}T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}} * \Bigg(- \alpha\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\delta x_{i+1,j}}\Delta y_{i+1,j} - \alpha\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\delta x_{i,j}}\Delta y_{i,j} - \alpha\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\delta y_{i,j+1}}\Delta x_{i,j+1} \\ -\alpha\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\delta y_{i,j}}\Delta x_{i,j} + \overrightarrow{U_{i+\frac{1}{2},j}}T_{i,j}\Delta y_{i+1,j} - \overrightarrow{U_{i-\frac{1}{2},j}}T_{i-1,j}\Delta y_{i,j} + \overrightarrow{V_{i,j+\frac{1}{2}}}T_{i,j}\Delta x_{i,j+1} - \overrightarrow{V_{i,j-\frac{1}{2}}}T_{i,j-1}\Delta x_{i,j}\Bigg)\end{split}} \tag{13}$$

II Algorithme et résolution

II.A Pré-processeur

Construction du maillage

Dans cette sous partie, nous définissons nos données dans un fichier texte et lisons ces données grâce à une **subroutine lecture**.

Nous construisons ensuite notre maillage dans mesh. Nous allons dans un premier temps travailler sur un **maillage uniforme**.

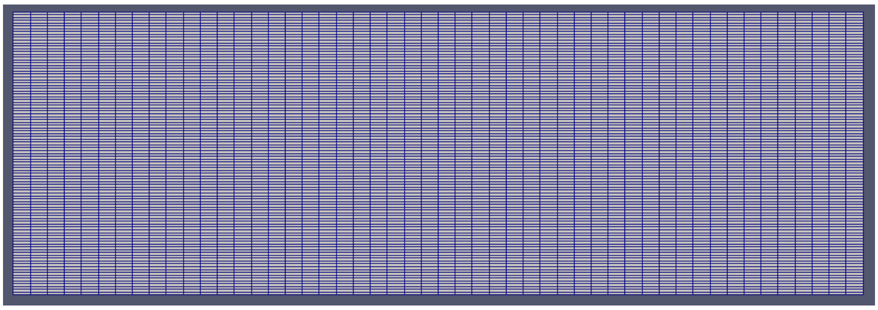

FIGURE 1 – Maillage uniforme

Cependant, dans l'optique de passer au cas plus complet (convection-diffusion), il peut être souhaitable de raffiner le maillage proche de la paroi chauffante. On utilisera pour cela l'expression suivante donnant la position verticale du noeud de maillage j (avec $1 \leq j \leq N_y$) :

$$y(j) = H(1 - \frac{tanh(\beta \frac{N_y - j}{N_y - 1})}{tanh(\beta)}) \tag{14}$$

avec $0 \leq \beta \leq 2$ un facteur caractérisant la non-uniformité du maillage selon y ($\beta = 0$ correspond au maillage uniforme codé précédemment).

Nous ré-effectuons donc notre travail avec un **maillage non uniforme** en prenant soin de modifier nos codes en conséquence.

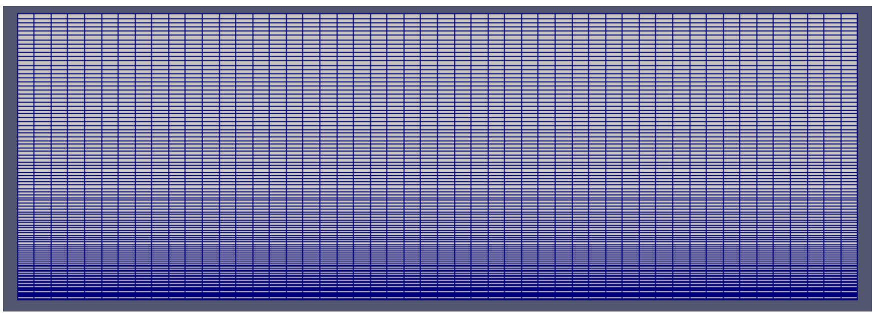

FIGURE 2 – Maillage non uniforme, $\beta = 1.3$

La **subroutine init blasius** fournie sur moodle nous permet ensuite de calculer le champ de vitesse en chaque point du maillage.

Et nous calculons ensuite notre **pas de temps** dans une nouvelle subroutine, en tenant compte de la CFL.

L'énoncé précise que pour observer le phénomène de diffusion thermique laminaire, il faut un nombre de Peclet inférieur à 10. Pour des vitesses infinies de l'ordre de 0.1 m/s, une hauteur (Longueur AD sur le schéma) de 0.03m et un α de $2.6 * 10^{-3}$, il faudrait approximativement $N_y = 100$. Dans la suite nous retiendrons $Ny = 50$ car autrement l'espace disque disponible n'est plus assez important pour mener tous les calculs qui deviennent très long, et on ne s'éloigne que très peu du Peclet demandé.

On nous demande ensuite de valider les dimensions proposées en calculant l'épaisseur de la couche limite $\delta(x) = 4.92\frac{x}{\sqrt{Re_x}}$. Pour celà il faut d'abord calculer $Re_x = \frac{U_{inf}*x}{\nu}$. On trouve alors $\delta(x) = 0.0198m$ ce qui est cohérent avec une hauteur L de 0.03m.

II.B Post-Processeur

On lance maintenant notre programme afin de visualiser l'advection et la diffusion simultanément en 2D.

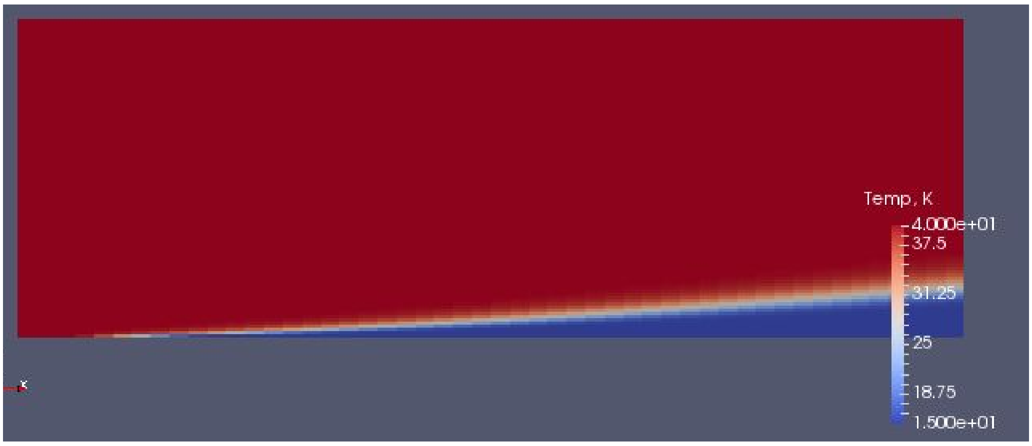

Figure 3 – Advection-Diffusion 2D sans processeur, $T_{initiale}$ =20°C, $T_{extérieur}$ =40°C

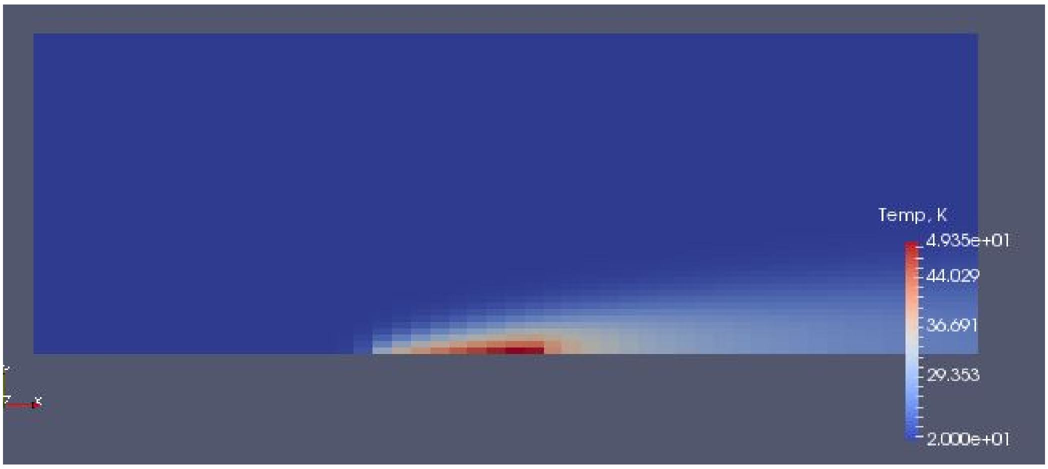

FIGURE 4 – Advection-Diffusion 2D avec une puissance dissipée par le processeur de 3W et T_i =20°C, T_{ext} =20°C.

II.C Noyau du solveur

Avant de simuler le phénomène d'advection - diffusions 2D, nous validons les points suivants :

II.C.1 Visualisation des champs de vitesse

Nous visualisons les champ de vitesse dans l'ensemble du domaine grâce au logiciel paraview.

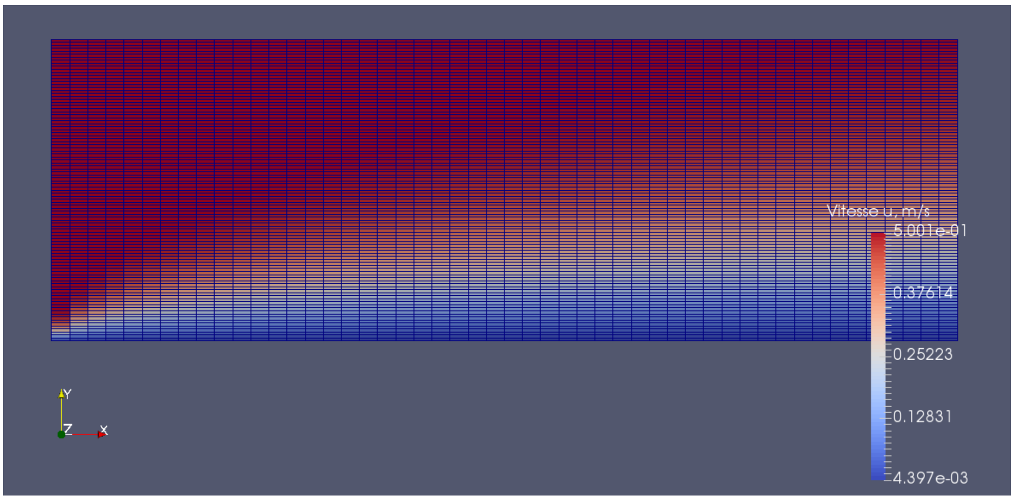

FIGURE 5 – Champ de vitesse u

La couche limite augmente pour ce champ de vitesse, ce qui est conforme à nos attentes.

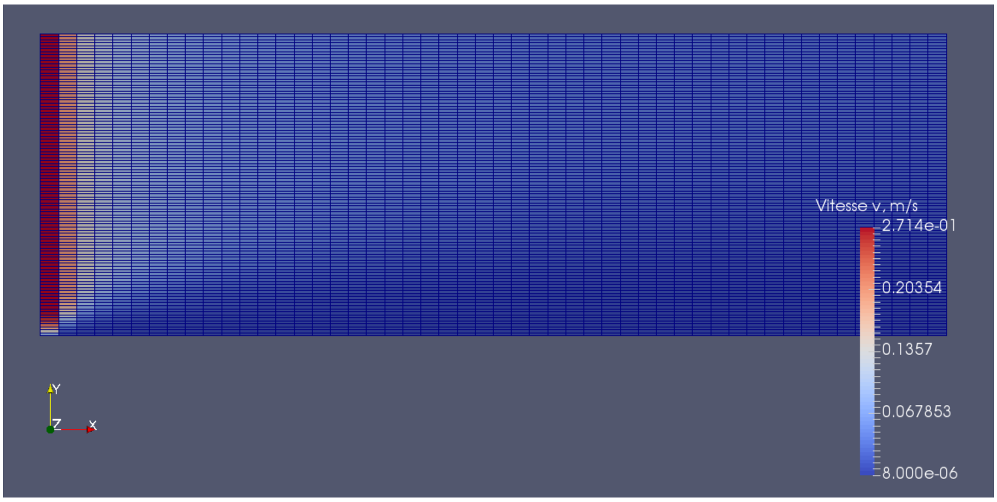

FIGURE 6 – Champ de vitesse v

II.C.2 Conditions aux limites

Nous allons réaliser les tests 1D suivants avec des conditions aux limites particulières selon x/y respectivement :

Frontières	**Conditions**
AD/AB	Température $\mathrm{T}_1 \neq T_0$
AB + DC / AD + BC	Paroi avec flux nul imposé
BC/DC	Condition de sortie : interpolation du flux diffusif à partir des fluxs connus à l'intérieur du domaine height

II.C.3 Codage de l'advection pure 1D

Selon la direction x

On initialise la température à $T_0 = 15C$ ainsi qu'un vitesse uniforme $u(x, y) = U_\infty = 0.5m/s$ dans tout le domaine dans une nouvelle **subroutine initilisation température** que nous définissons. Nous imposons en entrée (sur la frontière AD) une température $T_{ext} = 40C$, les conditions de flux dans la **subroutine calcul flux**, ainsi qu'un $\alpha = 0$ (pour n'avoir que l'effet de la diffusion).

FIGURE 7 – Advection pure selon x, Cu = 0.5

Comparaison de la solution analyptique et de notre solution sur Matlab

La solution analyptique est donnée par :

$$T_{exacte}(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)H(-x + U_\infty t) \tag{15}$$

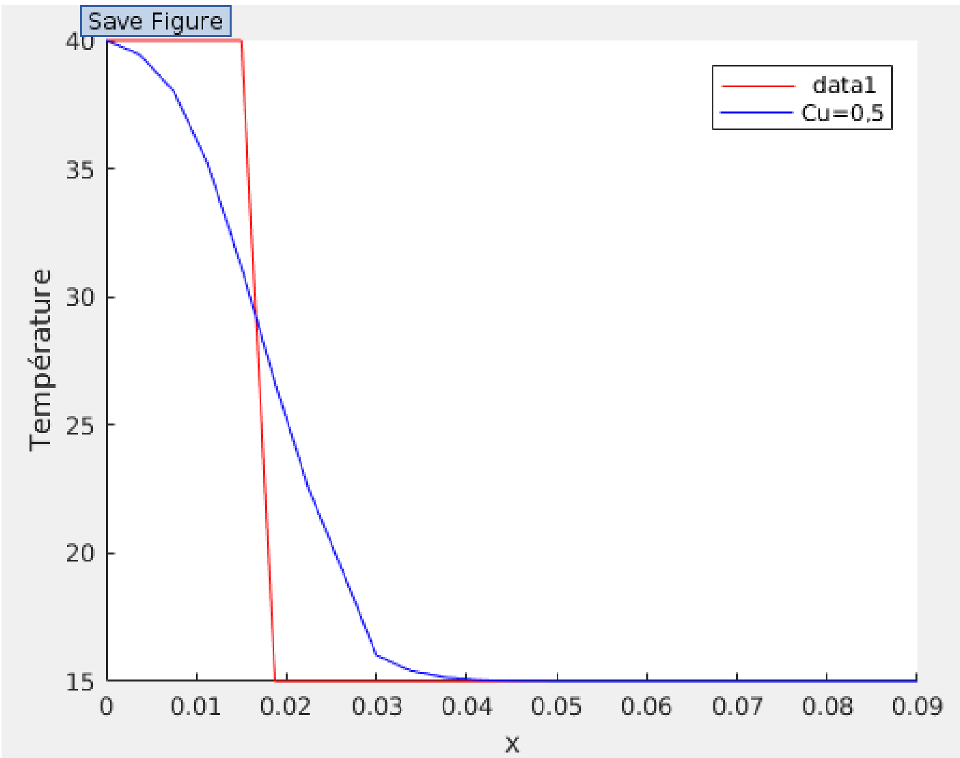

FIGURE 8 – Comparaison de la solution analyptique et de notre solution sur Matlab

Sur la figure 7, on remarque tout de suite que l'advection n'est pas nette. En effet, elle présente une sorte de diffusion dû à la valeur de CFL : Cu (Cu = 0.5). Il s'agit d'une diffusion numérique. Ainsi, lorsque nous modifions la valeur de Cu et que nous la faisons tendre vers 1, nous nous rapprochons de plus en plus de la solution analyptique.

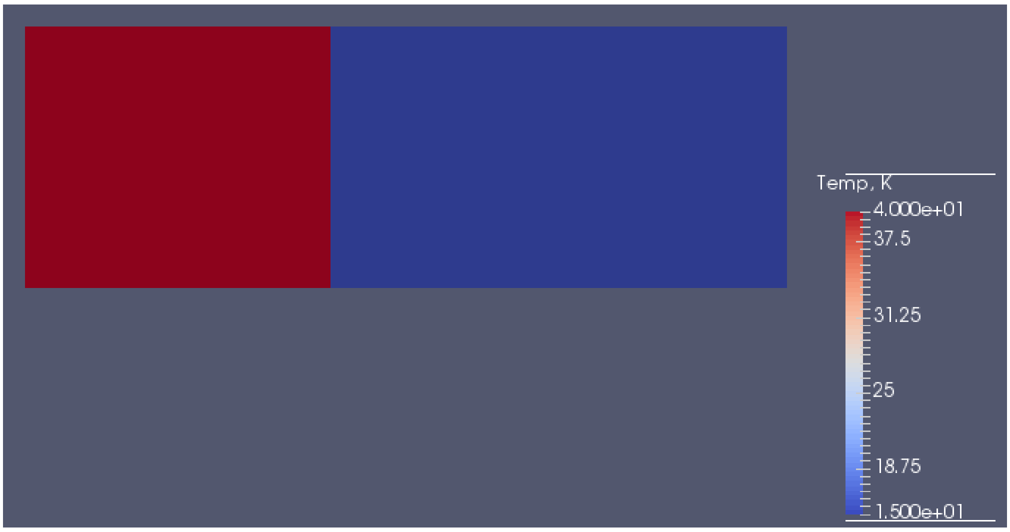

FIGURE 9 – Advection pure selon x, Cu = 1

Selon la direction y

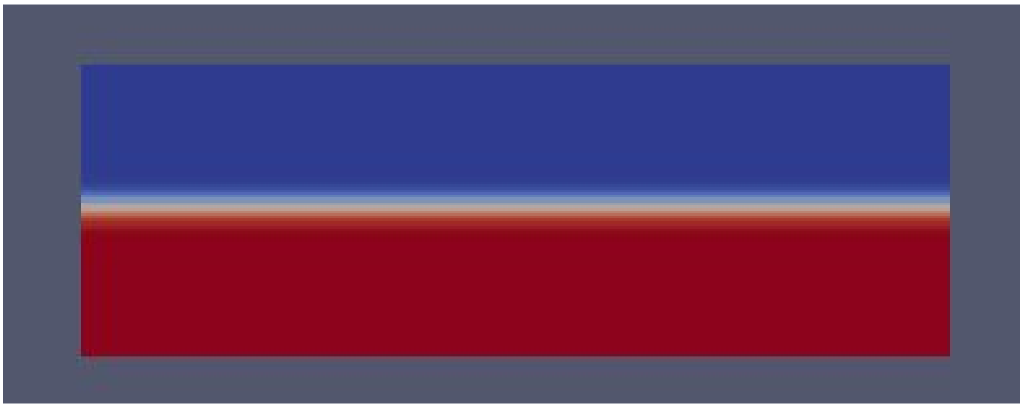

FIGURE 10 – Advection pure selon y, Cu = 0.5

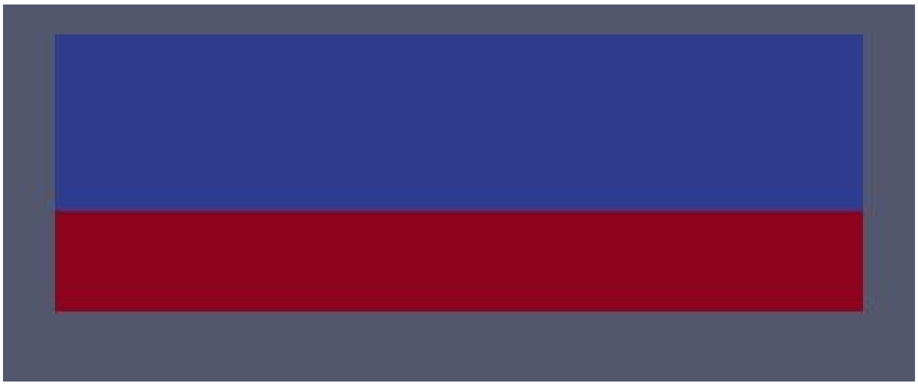

Figure 11 – Advection pure selon y pour un maillage uniforme, Cu = 1

II.C.4 Codage de la diffusion pure 1D

Maillage uniforme

Nous fixons u(x,y) = 0 dans tout le domaine, une température T_{ext}, nos conditions de flux et une condition d'interpolation de flux sur la frontière BC.

Pour que les conditions aux limites n'influence pas notre solution, il suffit de choisir t_{final} de telle sorte que $t_{final} \leqslant t_{carac}$ avec $t_{carac} = \frac{H^2}{\alpha}$ le temps caractéristique de la diffusion.

Figure 12 – Diffusion pure selon x pour un maillage uniforme

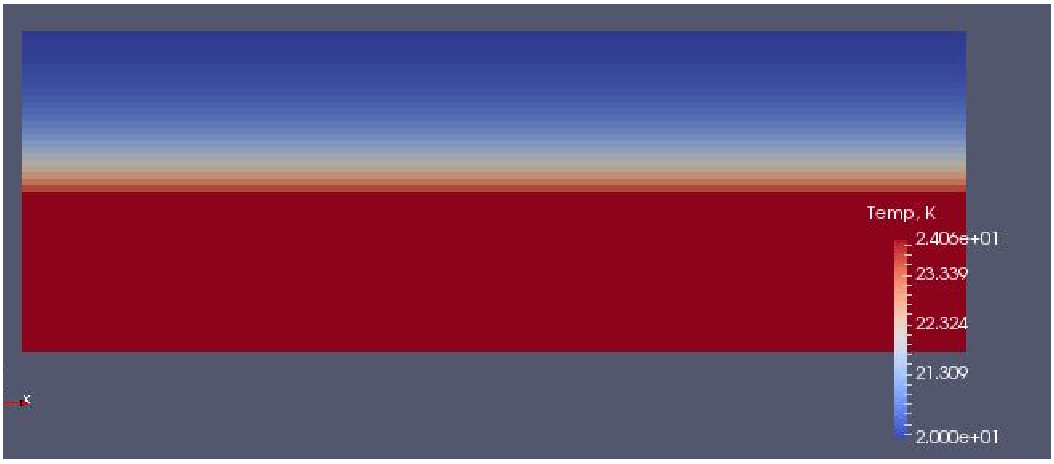

FIGURE 13 – Diffusion pure selon y pour un maillage uniforme, Cu = 0.5

Maillage non uniforme

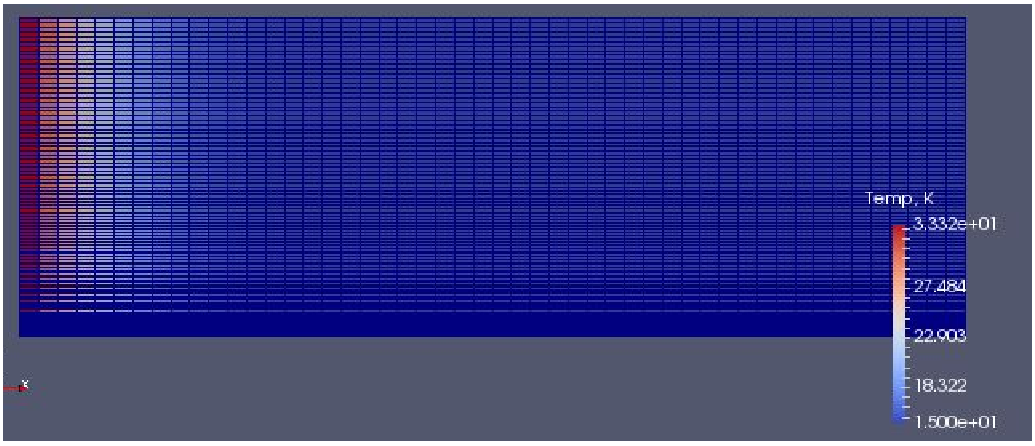

FIGURE 14 – Diffusion pure selon x pour un maillage non uniforme

Comparaison de la solution analyptique et de notre solution sur Matlab

La solution analyptique est donnée par :

$$T_{exacte}(x,t) = T_{ext} - (T_{ext} - T_0)erf(\frac{0.5x}{\sqrt{\alpha t}}) \tag{16}$$

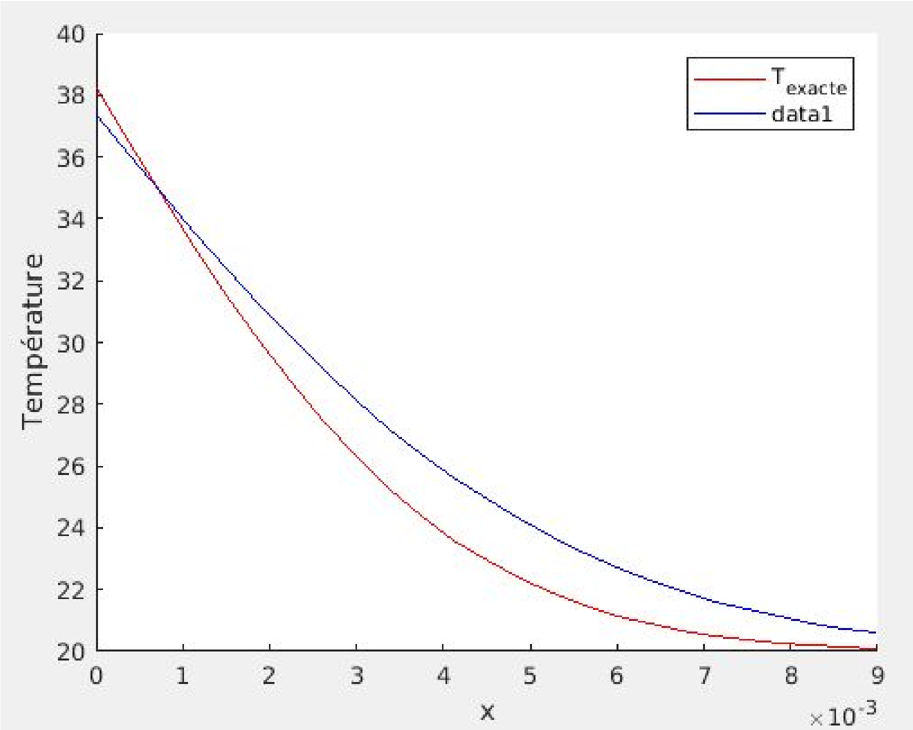

FIGURE 15 – Comparaison de la solution analyptique et de notre solution sur Matlab pour une diffusion selon x

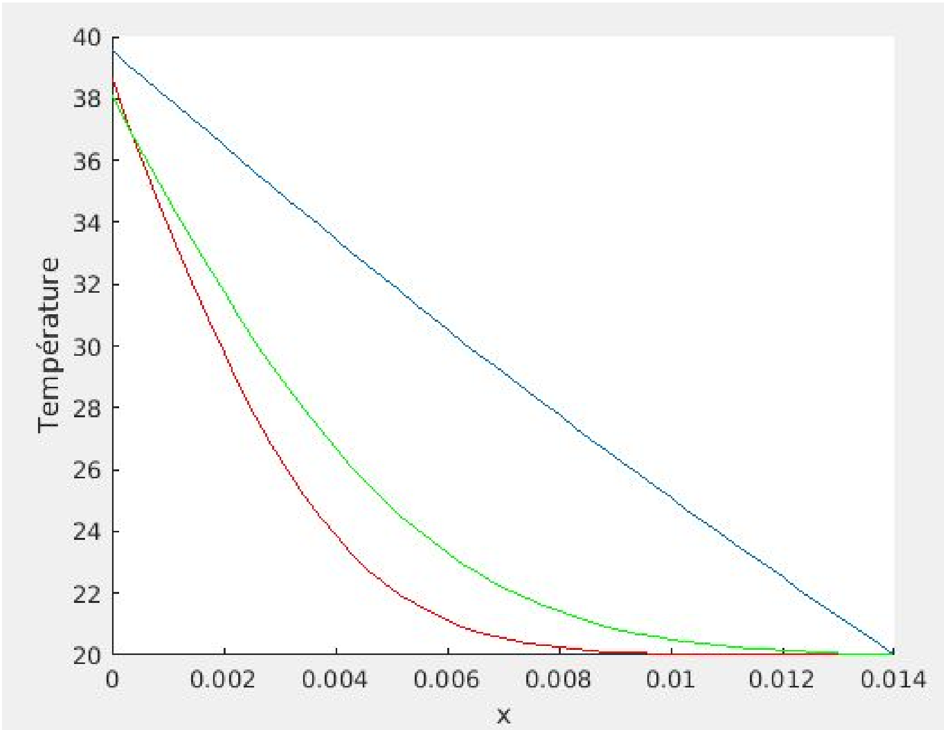

FIGURE 16 – Influence de Cu pour une diffusion selon x

La courbe rouge représente la solution analyptique, la courbe bleue est notre solution pour Cu=0.5 et la courbe verte pour Cu=0.25. Nous voyons donc que plus la valeur de Cu tend vers 0 plus la solution numérique tend vers la solution analyptique. Ceci s'accorde avec le résultat précédent sur l'advection. Plus le Cu est proche de 1 plus l'advection domine, à l'inverse plus le Cu tend vers 0, plus la diffusion sera importante. C'est pour cela que nous choisissons Cu = 0.5, afin de donner autant d'importance aux deux modes de transport.

III Exploitation du code

III.A Calcul du champ de vitesse pour une fréquence de coeurs F = 1Ghz

Critère pour la solution stationnaire

Nous modifions notre programme de façon à ce qu'il trouve le nombre d'itération nécessaire pour que $max(|T_{i,j}(t + dt) - T_{i,j}(t)|) < 0.00001$. Nous affichons ensuite le temps au bout duquel la solution stationnaire est atteinte. Ainsi, nous obtenons la solution stationnaire au bout de 1.96406388 s pour $U_\infty = 0.5m/s$ et une fréquence de coeurs de 1 Ghz , P = 5w.

L'énoncé demandait une vitesse $U_\infty = 0.01m/s$ mais la condition de CFL était trop lourde pour aller au bout des calculs, ce qui explique pourquoi nous nous sommes permit de prendre $U_\infty = 0.5m/s$.

Champ de température

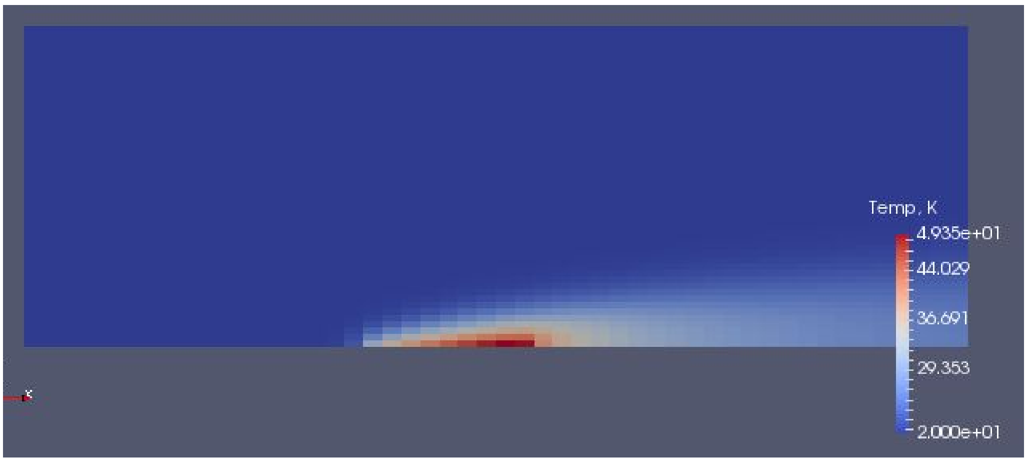

FIGURE 17 – Champ de température pour F=1Ghz et $U_\infty = 0.5m/s$

III.B Convergence en maillage

Nous choisissons de travailler avec $(N_x, N_y, \beta) = (50, 50, 1.3)$

Cette disposition est un bon compromis entre temps de calculs, la précision des calculs et la condition sur le nombre de Peclet. Nous aurions pu prendre $N_y > 200$ pour affiner les calculs et respecter davantage la condition sur le Peclet, mais il aurait fallu plus de temps pour réaliser tous les calculs que nous avons menés.

Nous prenons un tf=2s car nous verrons plus tard que le régime est considéré établi pour un temps similaire d'après un critère que nous avons définit.

III.C Profil de température à la surface du processeur

Pour $U_\infty = 0.5m/s$, nous traçons le profil de température à la surface du processeur pour P = 5W (F=1 Ghz).

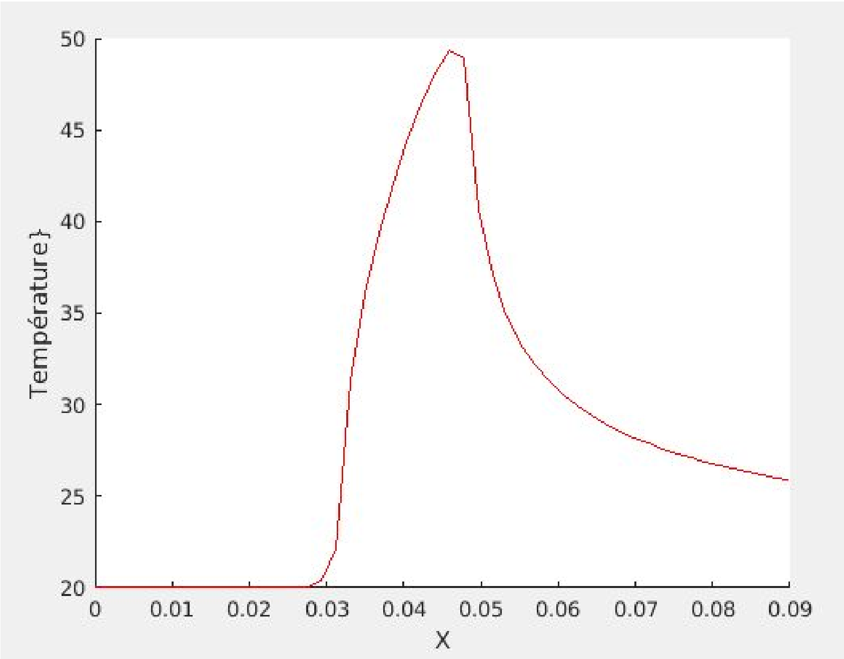

FIGURE 18 – Profil de la température pour F=1Ghz et $U_\infty = 0.5m/s$

Nous voyons que la température croît très rapidement au niveau du processeur et atteint son pic à environ 0,045m. Ce résultat est donc satisfaisant puisque le processeur dégage de la chaleur, il est donc normal que le maximum soit atteint à la surface de ce dernier.

Nous cherchons U_∞ de tel sorte que la température maximale à la surface du processeur qui tourne à F = 1.8 Ghz (P=9W) soit proche de 65C.

A une telle fréquence, pour $U_\infty = 0.5m/s$, nous obtenons une température maximale de 72C. En tatonnant, nous trouvons une température maximale de 64C pour $U_\infty = 0.7m/s$.

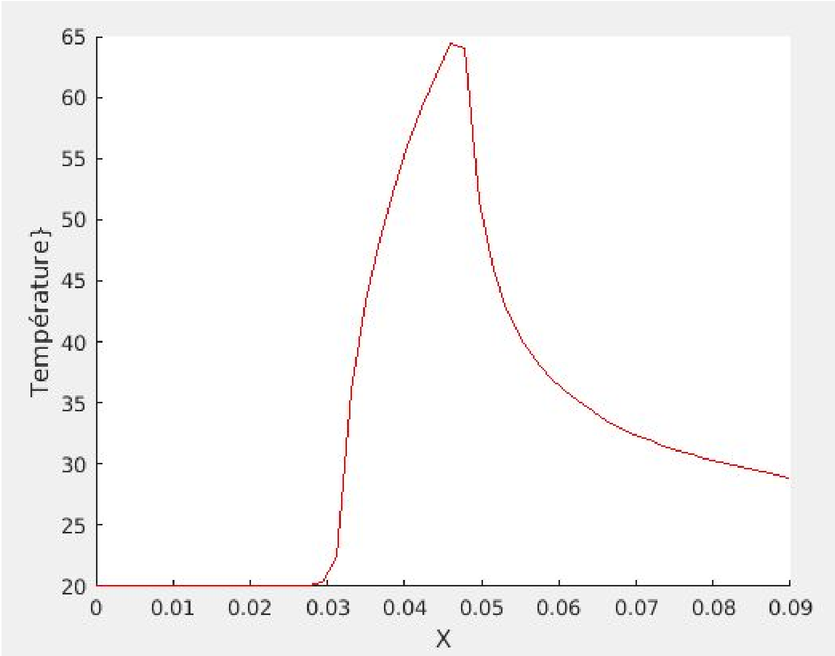

FIGURE 19 – Profil de la température pour F=1.8 Ghz et $U_\infty = 0.7m/s$

III.D Variation de la fréquence des coeurs

Nous faisons varier la puissance dissipée par le processeur de 2 à 9 W à $U_\infty = 0.5m/s$ fixé et nous observons l'évolution de la température maximale $T_{\max}$ en fonction de cette puissance P.

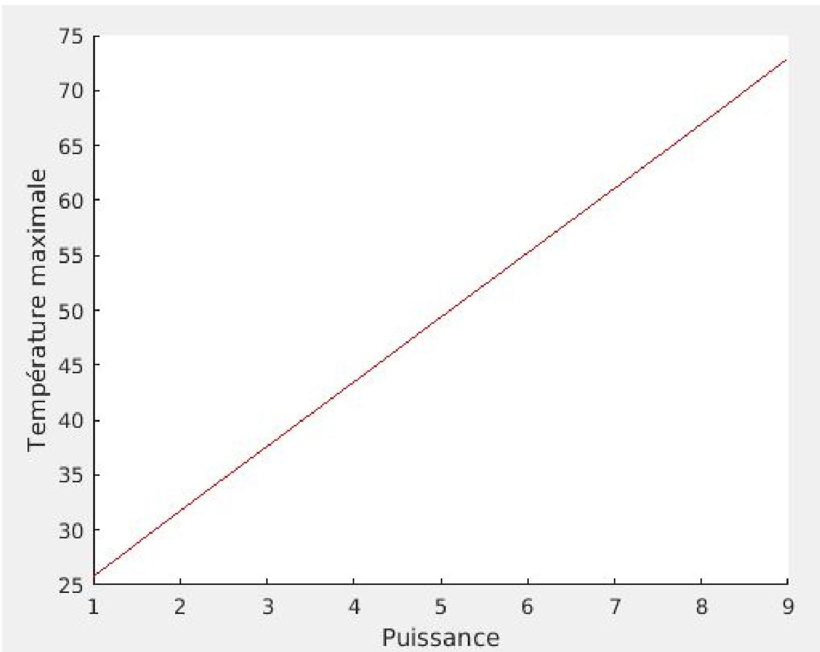

FIGURE 20 – Evolution de la température maximale en fonction de la puissance

Nous avons tracé la température maximum en fonction de la puissance. Or la puissance est liée à la fréquence par une relation de linéarité (énoncé). Le graphique représentant la température maximum en fonction de la fréquence aurait était similaire, mais seulement avec un coefficient directeur différent. La courbe obtenue montre que plus la puissance dissipée est importante (donc plus la fréquence est grande), plus le processeur chauffe et donc la température augmente. On voit que cette courbe est donc linéaire. Cette linéarité liant la température et la puissance du processeur (et donc la fréquence) explique l'expression du flux de température lié au processeur. En effet, celui-ci implique une relation linéaire entre la puissance et la température maximum (cf subroutine calcul flux)

III.E Variation de U_∞

Nous allons maintenant fixer la puissance à 5W et observer l'évolution de la température en fonction de la vitesse U_∞.

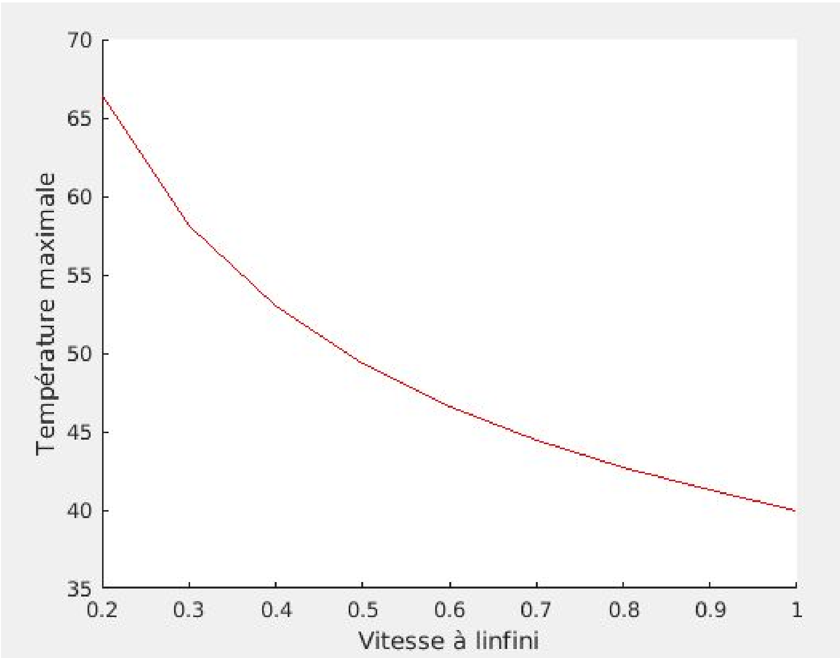

Figure 21 – Evolution de la température maximale en fonction de la vitesse à l'infini

Notre courbe est semblable à une exponentielle décroissante. Lorsque nous augmentons la vitesse à l'infini, la température maximale de notre système, elle, diminue. Cela est dû au phénomène de dissipation de la température lorsque l'advection "domine" la diffusion. Cette courbe peut s'expliquer matématiquement par l'expression du flux advectif. En effet, si on ne tient compte que de ce dernier (diffusion négligée), on remarque que l'équation du transport de la température devient une équation différentiel faisant intervenir la température et la vitesse et dont la solution serait une exponentielle décroissante en fonction de la vitesse. D'où l'allure de notre courbe.

IV CONCLUSION

Durant ce projet, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la température dans un système composé d'un processeur électronique dôté d'une certaine puissance. Nous l'avons résolu grâce à la méthode des volumes finis que nous avons étudié en cours et du langage de programmation Fortran 90.

Après avoir discrétisé les équations mises en jeu, nous avons dû créer différents maillages : un uniforme, où chaque volume est identique et chaque noeud à égale distance du noeud suivant et un non uniforme selon la direction y. Dans ce dernier, les volumes ne sont donc pas égaux et les noeuds sont à des distances non équivalentes des uns des autres. Nous avons ensuite dû définir correctement nos conditions aux limites et nos fluxs afin de distinguer les modes de propagation addectif et diffusif. Une fois que tout a été codé, nous avons pu visualiser ces différents phénomènes dans paraview et nous avons exploité nos résultats sur Matlab.

Suite à cette étude, nous avons conclu qu'un système électrique comprenant un processeur dissipe de la chaleur au niveau de celui-ci. Ainsi, la température environnante augmente. Pour éviter une surchauffe, il est nécessaire d'ajouter un système de refroidissement. La solution proposée est de faire circuler un fluide d'air à une certaine vitesse (comme la ventilation des ordinateurs).